

Министерство науки и высшего образования РФ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

Б1.В.ДВ.08.01 Интегрирование на многообразиях

наименование дисциплины (модуля) в соответствии с учебным планом

Направление подготовки / специальность

01.03.01 Математика

Направленность (профиль)

01.03.01.31 Математический анализ, алгебра и логика

Форма обучения

очная

Год набора

2019

## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Программу составили \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_ кандидат физ.-матем. наук, доцент, Знаменская О.В.; доктор физ.матем.

\_\_\_\_\_ наук, профессор, Цих А.К.

\_\_\_\_\_ должность, инициалы, фамилия

## 1 Цели и задачи изучения дисциплины

### 1.1 Цель преподавания дисциплины

Как известно, основу интегрального исчисления функций одного переменного составляет теорема Ньютона-Лейбница. Ее многомерным аналогом служит общая теорема Стокса. Концепция интеграла предполагает наличие двух объектов: того, что интегрируется (функция, дифференциальная форма, тензор и т.п.) и того, по чему интегрируется (по множеству, контуру, цепи и т.п.). В многомерной ситуации указанные объекты могут иметь сложную структуру в геометрическом и аналитическом аспектах. Эти аспекты породили самостоятельные направления в многомерной геометрии: теорию кохомологий и теорию гомологий. В данном курсе основы теории кохомологий излагаются в адаптированном для теории кратного интегрирования виде.

#### 1.1. Цель преподавания дисциплины

Настоящий курс посвящен изложению теории кохомологий, адаптированной для теории кратного интегрирования. Его целью является:

- повышение качества математической подготовки студентов путем изучения теории и методов кратного интегрирования;
- формирование представлений о единстве математики на примере теории кохомологий, где в равной мере участвуют анализ, алгебра и геометрия.

### 1.2 Задачи изучения дисциплины

Задачей изучения дисциплины является освоение методов теории кохомологий как многомерной версии теории неопределенного интеграла.

В результате изучения дисциплины студент должен:

знать понятия многообразия и дифференциальной формы на многообразии; замкнутые, точные формы, кохомологии де Рама; теорему Пуанкаре; дифференцирование и интегрирование форм на многообразиях; точную кохомологическую последовательность Майера-Виеториса, формулу Стокса;

уметь вводить на множествах структуру многообразия разного класса гладкости; применять кохомологическую последовательность Майера-Виеториса для вычисления кохомологий де Рама; применять абстрактную формулу Стокса для вычисления интегралов в конкретных ситуациях;

владеть основными понятиями и методами теории кохомологий.

### 1.3 Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Код и наименование индикатора достижения компетенции	Запланированные результаты обучения по дисциплине
<b>ПК-1: Способен применять базовые знания математических и естественных наук, основ программирования и информационных технологий при проведении исследования в конкретной области профессиональной деятельности</b>	
ПК-1.1: Применяет	Знать: основные области применения аппарата

теоретические и практические знания математических и естественных наук, основ программирования и информационных технологий для проведения в конкретной области профессиональной деятельности	интегрирования на многообразиях. Уметь: применять аппарат интегрирования на многообразиях при решении задач из смежных областей математики. Владеть: понятиями и методами интегрирования на многообразиях на уровне, достаточном для их осознанного применения в смежных областях математики и в математической физике.
ПК-1.2: Решает научные задачи в соответствии с поставленной целью и в соответствии с выбранной методикой	Знать: основные понятия и методы интегрирования на многообразиях. Уметь: применять методы интегрирования на многообразиях для исследования геометрических объектов и решения задач. Владеть: понятиями и методами интегрирования на многообразиях на уровне, достаточном для их осознанного применения.
<b>ПК-2: Способен проводить под научным руководством исследование на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности</b>	
ПК-2.2: Представляет научные результаты на учебных семинарах	Знать: правила научной коммуникации и формы предъявления научных результатов на учебных семинарах. Уметь: четко формулировать научные результаты, использовать информационные технологии для их демонстрации. Владеть: правилами и средствами научной коммуникации на уровне, достаточном для представления научных результатов на учебных семинарах.

#### 1.4 Особенности реализации дисциплины

Язык реализации дисциплины: Русский.

Дисциплина (модуль) реализуется с применением ЭО и ДОТ

URL-адрес и название электронного обучающего курса: <https://e.sfu-kras.ru/course/view.php?id=13944>.

## 2. Объем дисциплины (модуля)

Вид учебной работы	Всего, зачетных единиц (акад. час)	е
		1
<b>Контактная работа с преподавателем:</b>	<b>2 (72)</b>	
занятия лекционного типа	1 (36)	
практические занятия	1 (36)	
<b>Самостоятельная работа обучающихся:</b>	<b>1 (36)</b>	
курсовое проектирование (КП)	Нет	
курсовая работа (КР)	Нет	

### 3 Содержание дисциплины (модуля)

#### 3.1 Разделы дисциплины и виды занятий (тематический план занятий)

		Контактная работа, ак. час.							
№ п/п	Модули, темы (разделы) дисциплины	Занятия лекционного типа		Занятия семинарского типа				Самостоятельная работа, ак. час.	
				Семинары и/или Практические занятия		Лабораторные работы и/или Практикумы			
		Всего	В том числе в ЭИОС	Всего	В том числе в ЭИОС	Всего	В том числе в ЭИОС	Всего	В том числе в ЭИОС
<b>1. Вещественные и комплексные многообразия</b>									
	1. Понятие многообразия			2					
	2. Классические примеры многообразий. Многообразия уровня. Вещественное проективное пространство $RP^n$ .			2					
	3. Комплексное проективное пространство $CP^n$ , связь $CP^1$ со сферой Римана. Римановы поверхности.			2					
	4. Разбиение единицы			2					
	5. Погружения, субмерсии и вложения многообразий.			2					
	6. Теорема о вложении в $R^{2n+1}$ произвольных $n$ -мерных многообразий. Триангулируемость многообразий.			2					

7. Понятие многообразия. Определение многообразия, классы топологических, гладких, аналитических многообразий. Простейшие примеры многообразий. Топологические пространства, не являющиеся многообразиями. Комплексные многообразия.	2							
8. Классические примеры многообразий. Многообразия уровня. Вещественное проективное пространство $RP^n$ . Комплексное проективное пространство $CP^n$ , связь $CP^1$ со сферой Римана. Римановы поверхности.	4							
9. Разбиение единицы. Функция шапочки; склейка разбиения единицы с помощью шапочек. Теорема Сарда.	2							
10. Вложения многообразий и их триангулируемость. Погружения, субмерсии и вложения многообразий. Теорема о вложении в $R^N$ компактных многообразий. Теорема о вложении в $R^{2n+1}$ произвольных $n$ -мерных многообразий. Теорема о триангулируемости многообразий.	4							
<b>2. Дифференциальные формы на многообразиях</b>								
1. Отображения многообразий, их дифференциалы и касательные пространства.			2					
2. Операции сложения и внешнего умножения дифференциальных форм. Канонический вид дифференциальной формы.			2					
3. Дифференциал формы			2					

4. Отображения многообразий, их дифференциалы и касательные пространства. Отображения многообразий. Касательные векторы, касательные пространства и дифференциалы отображений. Касательное расслоение и векторные поля.	2							
5. Понятие дифференциальной формы. Наводящие соображения, определение дифференциальной формы на многообразии. Операции сложения и внешнего умножения дифференциальных форм. Канонический вид дифференциальной формы.	2							
6. Дифференциал формы. Определение дифференциала формы. Свойства дифференциала в фиксированной системе координат, преобразование дифференциала формы относительно отображений. Корректность определения понятия дифференциала (инвариантность). Примеры.	2							
<b>3. Когомологии де Рама как многомерная версия неопределенного интеграла</b>								
1. Замкнутые и точные формы, группа когомологий де Рама, пример замкнутой, но не точной формы (форма Пуанкаре)			2					
2. Звездные области. Гомотопически эквивалентные многообразия.			2					
3. Когомологии окружности и n-мерной сферы в случае $n=2$ .			2					
4. Когомологическая последовательность Майера–Вьеториса.			2					
5. Ориентируемость многообразий.			2					



6. Когомологии де Рама. Замкнутые и точные формы, определение группы когомологий де Рама, пример замкнутой, но не точной формы (форма Пуанкаре).	2							
7. Теорема Пуанкаре. Гомотопическая инвариантность групп когомологий. Определение звездной области. Теорема Пуанкаре. Гомотопически эквивалентные многообразия. Теорема о гомотопической инвариантности.	2							
8. Примеры гомотопически эквивалентных многообразий. Звездная область гомотопически эквивалентна одноточечному многообразию. Гомотопическая эквивалентность сфере $S_n$ многообразия $R^{n+1} \setminus \{0\}$ и комплексной квадратики, другие примеры.	2							
9. Когомологии сферы. Когомологии окружности и $n$ -мерной сферы в случае $n=2$ .	2							
10. Когомологическая последовательность Майера–Вьеториса. Основной инструмент для вычисления когомологий де Рама — когомологическая последовательность Майера–Вьеториса. Принцип Майера–Вьеториса.	2							
<b>4. Интегрирование дифференциальных форм</b>								
1. Многообразия с краем: определение, примеры, индуцированная ориентация на крае.			2					
2. Интеграл дифференциальной формы по ориентируемому многообразию (с краем).			2					

3. Общая формула Стокса. Вычисление некоторых интегралов.			2					
4. Формулы Грина, Гаусса–Остроградского и классическая формула Стокса как следствия из общей формулы Стокса. Другие следствия из формулы Стокса.			2					
5. Ориентируемость многообразий. Определение ориентируемого многообразия. Ориентируемость. Условие ориентируемости $R^n$ . Ориентируемость произвольного комплексно аналитического многообразия. Условие ориентируемости в терминах дифференциальных форм.	2							
6. Интеграл дифференциальной формы по ориентируемому многообразию. Многообразия с краем: определение, примеры, индуцированная ориентация на крае. Интеграл дифференциальной формы по ориентируемому многообразию (с краем).	2							
7. Теорема Стокса. Общая формула Стокса. Формула Ньютона–Лейбница как формула Стокса на прямой. Формулы Грина, Гаусса–Остроградского и классическая формула Стокса как следствия из общей формулы Стокса. Другие следствия из формулы Стокса.	4							
8.							36	
Всего	36		36				36	

## **4 Учебно-методическое обеспечение дисциплины**

### **4.1 Печатные и электронные издания:**

1. Телеман К. Элементы топологии и дифференцируемые многообразия: перевод с румынского(Москва: Мир).
2. Нарасимхан Р., Шабат Б. В. Анализ на действительных и комплексных многообразиях: перевод с английского(Москва: Мир).
3. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ: Ч. 1. Функции одного переменного: учебник для университетов по специальностям "Математика", "Механика" : [в 2 ч.](Санкт-Петербург: Лань).
4. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ: Ч. 2. Функции нескольких переменных: учебник для университетов по специальностям "Математика", "Механика": [в 2 ч.](Санкт-Петербург: Лань).
5. Мамфорд Д. Красная книга о многообразиях и схемах: перевод с английского(Москва: МЦНМО).
6. Антипова И. А. Интегральные преобразования и их применения: учебно-методическое пособие [для студентов напр. 01.03.04 «Прикладная математика», а также может быть полезным бакалаврам направлений 01.03.01 «Математика», 01.03.01 «Математика и компьютерные науки», 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»](Красноярск: СФУ).
7. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ: учеб. для студ. унив-в().
8. Антипова И. А., Знаменская О. В., Лейнартас Е. К., Цих А. К. Кратное интегрирование. Когомологии: электрон. учеб.-метод. комплекс дисциплины(Красноярск: ИПК СФУ).

### **4.2 Лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение, в том числе отечественного производства (программное обеспечение, на которое университет имеет лицензию, а также свободно распространяемое программное обеспечение):**

1. Специальное программное обеспечение в учебном процессе по данной дисциплине не используется. Методика проведения занятий допускает использование технических средств (проекторы, интерактивные доски), обеспеченных соответствующим программным обеспечением.

### **4.3 Интернет-ресурсы, включая профессиональные базы данных и информационные справочные системы:**

1. Для самостоятельной работы у студентов должен быть доступ к электронному каталогу НБ СФУ.

## **5 Фонд оценочных средств**

Оценочные средства находятся в приложении к рабочим программам дисциплин.

## **6 Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

Методика проведения занятий допускает как использование технических средств (проекторы, интерактивные доски), так и классические ауди-торные занятия, обеспечиваемые стандартными материально-техническими средствами.

Лекционные аудитории должны быть оборудованы современным видеопроекционным оборудованием для презентаций, средствами звуковоспроизведения, экраном, и иметь выход в Интернет, а также иметь интерактивную доску или доску для письма маркерами.

Помещения для проведения семинарских занятий должны иметь мультимедийное оборудование, а также иметь интерактивную доску или доску для письма маркерами, учебную мебель.

Библиотека должна иметь рабочие места для студентов, оснащенные компьютерами с доступом к базам данных, локальную сеть университета и Интернет.

Освоение дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья, в зависимости от нозологий, осуществляется с использованием средств обучения общего и специального назначения.